Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра исследования операций

Отчет по преддипломной практике

«Оптимизация крупных закупок в модели Бертсимаса-Ло с учетом дополнительной информации»

Студентка 411 группы
А. И. Макарова

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент В. В. Морозов

Москва, 2014

Содержание

Введение

В работе рассматривается рынок, движимый заявками, который представляется в виде книги лимитированных заявок– множество заявок на покупку и продажу, доступных в данный момент. Каждая заявка в книге содержит информацию о своей цене и соответствующем объеме. При сделке объема V происходит исполнение лучших(по цене) заявок суммарным объемом V, т.е данные заявки изымаются из книги. В любой момент игроки могут выставлять и снимать свои заявки по усмотрению.

Изучается динамика стратегии, которая обеспечивает минимизацию величины дисперсии затрат рынка, при условии ограниченных средних затрат. Крупная закупка на рынке некоторого актива приводит к увеличению его цены исполнения, поскольку из книги изымаются заявки с низкими ценами и число таких заявок ограничено. Для оптимизации таких покупок следует учитывать динамику изменения цены.

Модель Бертсимаса-Ло [1] предполагает наличие одного инвестора, который может совершать покупки достаточно большого размера, для которых необходимо учитывать влияние на цену. Так же отметим, что это дискретная модель с равномерным разбиением по времени и она не учитывает временное влияние на цену. Постоянное влияние в этой модели зависит от объема сделки.

Постановка задачи

В рассматриваемой модели инвестор стремится приобрести актив в большом количестве в течении фиксированного отрезка времени $[0, T]$. Как было сказано выше, отрезок разбивается на равные части $\Delta t = \frac{T}{N}$:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T.$$

A — объем совершаемой покупки.
Покупки совершаются в моменты времени t_i, $i = 0, \ldots, N$.
$x = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$ — стратегия инвестора.
$x_i \geqslant 0$ — объем покупки в момент времени t_i.
$\sum\limits_{i=0}^{N} x_i = A$
P_i — стоимость актива в момент времени t_i.
P_{-1} — стоимость актива, сложившаяся на рынке до начала торгов Динамика цен подчиняется закону геометрического броуновского движения:
$P_i = P_{i-1} + \alpha x_i + u_i,\ i = 1, \ldots, N$
u_i — независимые одинаково распределенные случайные величины.
$\mathbb{E} u_i = 0$, $Var\ u_i = \sigma^2 \Delta t$;
$\alpha > 0$ — коэффициент влияния покупки на цену
$P_0 = P_{-1} + \alpha x_0$, отсюда
$P_i = P_{-1} + \alpha \sum\limits_{j=0}^{i} x_j + \sum\limits_{j=1}^{i} u_j.$

$\mathbb{E}P_i = P_{-1} + \alpha \sum\limits_{j=0}^{i} x_j,$
$VarP_i = i\sigma^2 \Delta t.$
$\mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right]$ — средние затраты.
$\mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] = \sum\limits_{i=0}^{N} x_i \left(P_{-1} + \alpha \sum\limits_{j=0}^{i} x_j\right) = \sum\limits_{i=0}^{N} x_i P_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} x_j\right) x_i = AP_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} x_j\right) x_i$
$\mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] \to \min \Longleftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} x_j\right) x_i \to \min$

Минимизация средних затрат

Рассмотрим задачу *минимизации средних затрат* в данной модели:

$$\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{i=0}^{N} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} x_j\right) x_i \to \min, \\ \sum\limits_{i=0}^{N} x_i = A,\ x_i \geqslant 0. \end{cases}$$

Известно, что оптимальной стратегией является:

$$x_0 = x_1 = \ldots x_N = \frac{A}{N+1}.$$

Т.е. Затраты минимальны при равномерных закупках.

Минимизация дисперсии затрат с ограничением на максимальное значение средних затрат

Введем новые обозначения:

$\sum\limits_{i=j}^{N} x_j = X_j$ — сколько осталось купить в момент времени j,
$X_0 = A,$
В новых обозначениях:
$c(x) = \mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] = \sum\limits_{i=0}^{N} x_i \left(P_{-1} + \alpha \sum\limits_{j=0}^{i} x_j\right) = AP_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} X_i (X_i - X_{i+1}).$
$Var\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] = \sigma^2 \Delta t \sum\limits_{i=1}^{N} X_i^2.$

$Var\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] \to \min \Longleftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} X_i^2 \to \min.$

Сформулируем задачу:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} X_i^2 \to \min, \\ \mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] = AP_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1}) \leqslant C_0, \\ A = X_0 \geqslant X_1 \geqslant \ldots \geqslant X_N \geqslant X_{N+1} = 0. \end{cases}$$

Решение задачи

Целевая функция является квадратичной, как и ограничение. Для решения используется метод множетелей Лагранжа.

Выпишем функцию Лагранжа

$$L(\widetilde{X}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \lambda_1 \left(AP_{-1} + \alpha \sum_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1}) - C_0 \right).$$

$\widetilde{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_N)$
$\lambda_0,\ \lambda_1 \geqslant 0$ и одновременно не равны нулю.

В общем случае задача нерегулярная, поэтому рассмотрим два случая:
Первый — $\lambda_0 = 0$, тогда $\lambda_1 > 0$, второй — $\lambda_0 \neq 0$.

Рассмотрим первый случай:
Необходимое условие минимума:

$$L'_{\widetilde{X}} = \alpha\lambda_1(-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1}) = 0,\ i = 1, \ldots, N.$$

Из условия дополняющей нежесткости:

$$AP_{-1} + \alpha \sum_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1}) - C_0 = 0,$$

и должно выполняться:

$$X_i - X_{i+1} \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, N.$$

Решаем разностное уравнение

$$\begin{cases} -X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1} = 0, \\ X_0 = A, \\ X_{N+1} = 0. \end{cases}$$

Ищем решение в виде:
$X_t = \xi^t$.
Характериситическое уравнение:

$$\xi^2 - 2\xi + 1 = 0$$

$$(\xi - 1)^2 = 0$$

$\xi = 1$ — корень кратности 2.

$$X_t = \xi^t(C_1 + C_2 t).$$

$X_0 = C_1 = A$,
$X_{N+1} = (C_1 + C_2(N+1)) = 0$,
$A + C_2(N+1) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{A}{N+1}$.
Таким образом, решение для X_t имеет вид:

$$X_t = A - \frac{A}{N+1}t.$$

Проверим условие $X_i - X_{i+1} \geqslant 0$:

$$X_i - X_{i+1} = A - \frac{A}{N+1}i - A + \frac{A}{N+1}(i+1) = \frac{A}{N+1} \geqslant 0.$$

Рассмотрим второй случай, когда $\lambda_0 \neq 0$:
Тогда: $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \geqslant 0$.

Построим функцию Лагранжа:

$$L(\widetilde{X}, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \lambda(AP_{-1} + \alpha \sum_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1})).$$

Выпишем производную и приравняем ее к нулю:

$$L'_{\widetilde{X}} = 0:$$

$$\begin{cases} 2X_1 + \lambda\alpha(-X_0 + 2X_1 - X_2) = 0, \\ 2X_2 + \lambda\alpha(-X_1 + 2X_2 - X_3) = 0, \\ \ldots \\ 2X_N + \lambda\alpha(-X_{N-1} + 2X_N - X_{N+1}) = 0. \end{cases}$$

Решаем разностное уравнение:

$$\begin{cases} 2(1+\lambda\alpha)X_i = \lambda\alpha(X_{i-1}+X_{i+1}),\ i=1,\dots,N, \\ X_0 = A, \\ X_{N+1} = 0. \end{cases}$$

Так как $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, то можно сделать замену:

$$\omega = \frac{1}{\lambda\alpha} + 1, \omega > 1.$$

Тогда решаемые уравнения преобразуются к виду:

$$\alpha\omega X_i = X_{i-1} + X_{i+1}.$$

Будем, как и в предыдущем случае, искать решение в виде $X_t = \xi^t$:
Характеристическое уравнеие:

$$\xi^2 - 2\omega\xi + 1 = 0,$$

$$\xi_{1,2} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}.$$

$$\xi_1\xi_2 = 1,\ \xi_1 > 1, 0 < \xi_2 < 1.$$

Решение имеет вид:

$$X_t = C_1\xi_1^t + C_2\xi_2^t = C_1\xi_2^{-t} + C_2\xi_2^t.$$

Из начальный условий найдем C_1 и C_2:

$$X_0 = C_1 + C_2 = A,$$

$$X_{N+1} = C_1\xi_2^{-(N+1)} + C_2\xi_2^{N+1} = 0.$$

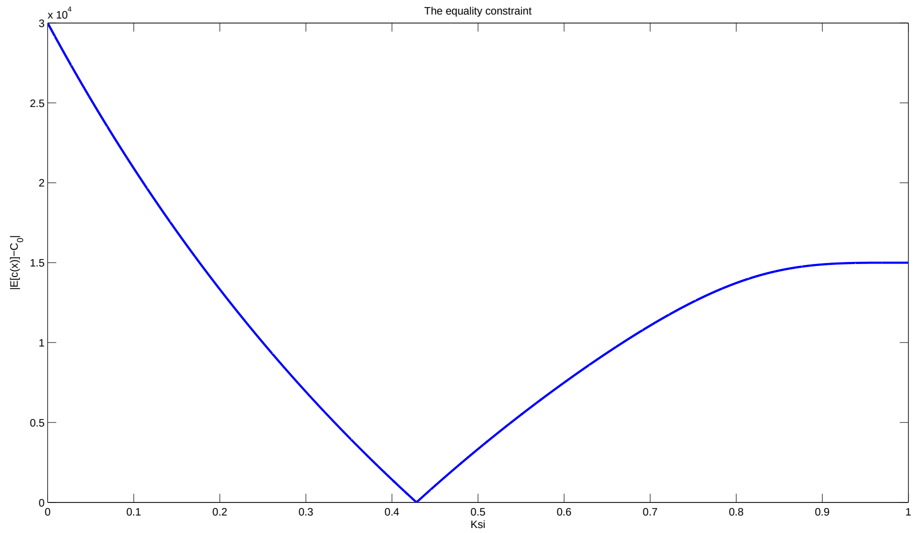
Таким образом, решение имеет вид:

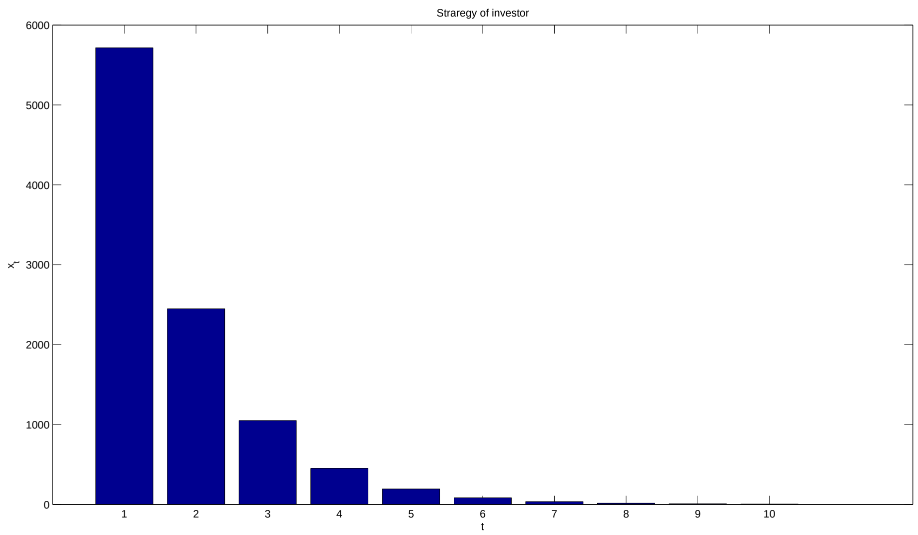
$$X_t = A\left(\frac{-\xi_2^{2(N+1)}\xi_2^{-t} + \xi_2^t}{1 - \xi_2^{2(N+1)}}\right).$$

Легко проверяется, что $X_i - X_{i+1} \geqslant 0$.

Численные примеры и результаты работы прораммы

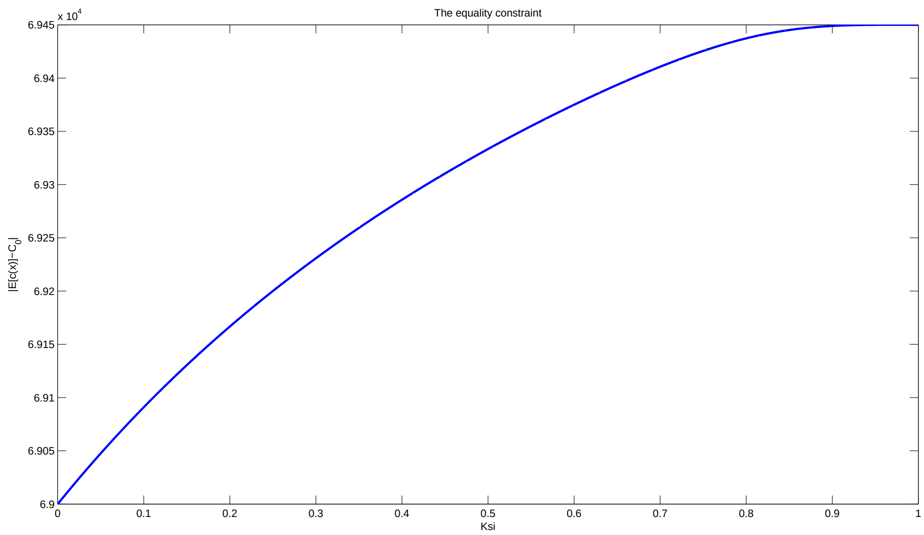
Рассмотрим задачу оптимизации с начальными данными:
$A = 10000;$
$P_{-1} = 2;$
$\alpha = 0.001;$
$C_0 = 90000;$
$N = 9;$

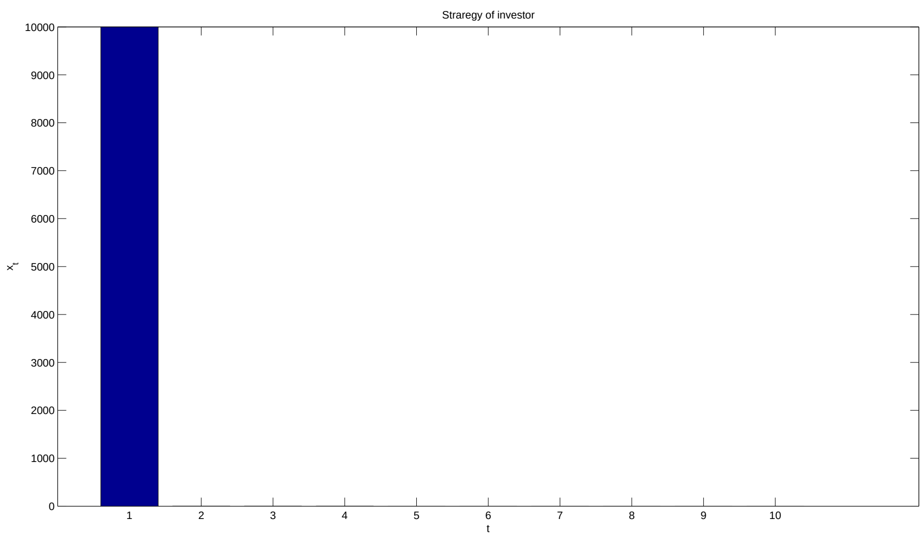




Эта задача соответствует случаю, когда достигается ограничение равенства.
$\lambda = 2625$

Рассмотрим другую задачу оптимизации с начальными данными:
$A = 10000$;
$P_{-1} = 2$;
$\alpha = 0.00001$;
$C_0 = 90000$;
$N = 9$;





Эта задача соответствует случаю, когда равенство нигде не достигается. Причем C_0 сильно больше средних затрат.

Если C_0 всегда меньше затрат, решения оптимизационной задачи не существует.

Список литературы

[1] *Bertsimas D., Lo A. W.* Optimal control of execution costs. — Journal of Financial Markets— №1—1998—pp. 1-50.

[2] *Андреев Н. А.* Современные математические модели влияния на цену: приложение к задаче оптимальноо управления портфелем на рынке, движимом заявками. — Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. Выпуск 9. 2012

[3] *Морозов В. В., Толли Н. И.* Минимизация риска при крупных закупках на финансовом рынке. — International Journal of Open Information Technologies ISSN: 2307-8162 vol.2, no. 8, 2014

[4] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. Т.1. — М.: Мир, 1984.